PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2015

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x \to 0} \frac{L(1+2x)}{x \cdot e^{sen\, x}}$. $\lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}}$.
Nota: tg x denota la tangente de x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{L(1+2x)}{x \cdot e^{sen\, x}} = \frac{L1}{0 \cdot e^0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1 \cdot e^{sen\, x} + x \cdot \cos x \cdot e^{sen\, x}} = \underline{2}.$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.$$

$A = \lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}}$. Tomando logaritmo neperiano en los dos términos:

$LA = L \lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}}$. Teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo:

$$LA = \lim_{x \to 0} \left[L \lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x + sen\, x} \cdot L(1 + tg\, x) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{L(1 + tg\, x)}{x + sen\, x} =$$

$$= \frac{L1}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\frac{1}{cos^2 x}}{1 + tg\, x}}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{cos^2 x \cdot (1 + tg\, x)}}{1 + \cos x} = \frac{\frac{1}{1 \cdot (1+0)}}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$LA = \frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$\underline{\lim_{x \to 0} (1 + tg\, x)^{\frac{1}{x + sen\, x}} = \sqrt{e}.}$$

****

2º) a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa x = 2.

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de f(x), la recta calculada en el apartado anterior y el eje de ordenadas.

c) Calcula el área de la región anterior.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 2x \;\; \Rightarrow \;\; m = f'(2) = 2 \cdot 2 = \mathbf{4}.$

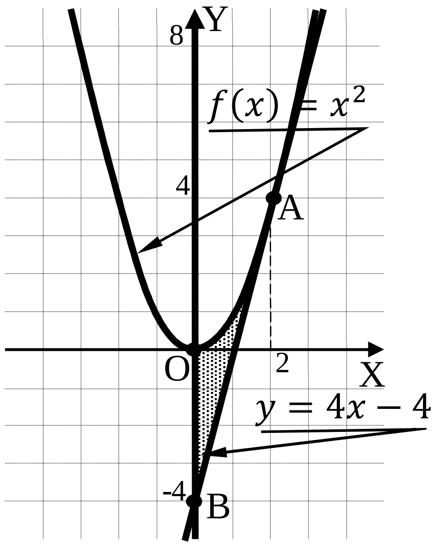
El punto de tangencia es el siguiente: $f(2) = 2^2 = 4 \; \Rightarrow \boldsymbol{P(2, 4)}.$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) = 4x - 8 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{Recta\ tangente\!:\ t \equiv 4x - y - 4 = 0}.$

b)

La representación gráfica de la situación, con bastante aproximación, es la figura adjunta.



c)

En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta tangente.

El área a calcular es la siguiente:

$S = \int_0^2 [x^2 - (4x - 4)] \cdot dx =$

$= \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = \underline{\frac{8}{3}\ u^2}.$

****

3º) a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-az=5 \end{cases}$, ɑ ε R, no es incompatible para ningún valor real de ɑ.

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

----

a)

El enunciado del teorema de Rouché-Fröbenius, puede enunciarse del modo siguiente: “Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sean C y A las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente. Según los rangos de C y A se presentan los siguientes casos:

Rang C = Rang A = nº incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Rang C ≠ Rang A ⇒ Sistema incompatible.

Rang C = Rang A < nº incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.”

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente, las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -a & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = a-12+9-9-2+6a = 7a-14 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a=2}.$$

$$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$Para\ a = 2\ es\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Para determinar el rango de M’ debemos tener en cuenta que las columnas segunda y tercera son proporcionales.

$$Rang\ M' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5+16+9+12-2-30 =$$

$$= 37-37 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2 = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ no\ es\ incompatibla\ \forall\alpha \in R.}$$

$c)$

Se resuelve es sistema para α = 2, que es compatible indeterminado, como se nos pide.

El sistema resulta $\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$. Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera y, haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 + 3\lambda \\ 2x - y = 1 - \lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 + 3\lambda \\ 6x - 3y = 3 - 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 7; \boldsymbol{x = 1};\ \ 2x - y = 1 - \lambda;$$

$2\lambda - y = 1 - \lambda;\ \ \boldsymbol{y = -1 + 3\lambda}.$

$$\underline{Solución: x = 1, y = -1 + 3\lambda, z = \lambda,\ \ \forall\lambda \in R.}$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$:

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por P (2, 1, 1).

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes de coordenadas.

----

a)

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2, -1, 1)$ y : $\overrightarrow{n_2} = (1, 0, -1)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + j + k + 2j = i + 3j + k = (1, 3, 1).$$

La expresión general del plano pedido es $\pi \equiv x + 3y + z + D = 0$. Como el plano π contiene al punto P(2, 1, 1), debe satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{c} \pi \equiv x + 3y + z + D = 0 \\ P(2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow\ 2 + 3 \cdot 1 + 1 + D = 0; 6 + D = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{D = -6}.$$

$$\underline{\alpha \equiv x + 3y + z - 6 = 0}.$$

b)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$ con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{c} \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0 \\ Eje\ X \to \{y = 0, z = 0\} \end{array} \right\} \to x - 6 = 0; x = 6\ \Rightarrow \boldsymbol{A(6, 0, 0)}.$$

$$\left. \begin{array}{c} \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0 \\ Eje\ Y \to \{x = 0, z = 0\} \end{array} \right\} \to 3y - 6 = 0; y = 2\ \Rightarrow \boldsymbol{B(0, 2, 0)}.$$

$$\left. \begin{array}{c} \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0 \\ Eje\ Z \to \{x = 0, y = 0\} \end{array} \right\} \to z - 6 = 0; z = 6\ \Rightarrow \boldsymbol{C(0, 0, 6)}.$$

Los puntos A, B y C determinan con el origen los vectores que determinan el tetraedro.

$\overrightarrow{OA} = (6,\ 0, 0)$. $\overrightarrow{OB} = (0,\ 2, 0)$. $\overrightarrow{OC} = (0,\ 0, 6)$.

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

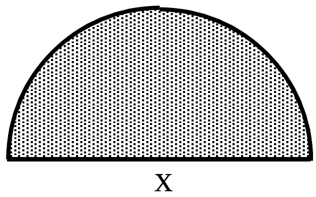
$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{12\ u^3}.$$

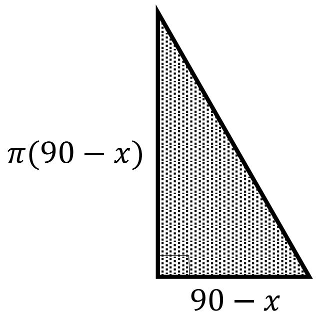
****

OPCIÓN B

1º) Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es $A = \pi \cdot r^2$.

Sean los segmentos x y $(90-x)$.





$$S = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(90-x)\cdot\pi\cdot(90-x)}{2} = \frac{\pi}{4}\cdot x^2 + \frac{\pi}{2}\cdot(90-x)^2.$$

La superficie es mínima cuando se anule su derivada:

$$S'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot x + \pi\cdot(90-x)^2\cdot(-1) = \frac{\pi}{2}\cdot[x - 2\cdot(90-x)^2].$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\cdot[x-2\cdot(90-x)^2] = 0 \Rightarrow x = 2\cdot(90-x)^2;$$

$$x = 2\cdot(8.100 - 180x + x^2) = 16.200 - 360x + 2x^2; 2x^2 - 361x + 16.200 = 0.$$

$$x = \frac{361 \pm \sqrt{361^2 - 4\cdot 2\cdot 16.200}}{2\cdot 2} = \frac{361\pm\sqrt{130.321-129.600}}{4} = \frac{361\pm\sqrt{721}}{4} = \frac{361\pm 26{,}85}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_1 = 96{,}96, \boldsymbol{x_2 = 83{,}54}.$$

La solución x = 96,96 carece de sentido lógico. (Para máximo).

$$\underline{Los\ trozos\ son\ 83{,}54\ cm\ y\ 6{,}06\ cm, respectivamente.}$$

La justificación de que se trata de área mínima es la siguiente:

$$S''(x) = \frac{\pi}{2}\cdot[1 - 4\cdot(90-x)\cdot(-1)] = \frac{\pi}{2}(1+360-4x) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(361-4x)}.$$

$$S''(83{,}54) = \frac{\pi}{2}(361 - 4\cdot 83{,}54) = \frac{\pi}{2}(361 - 334{,}16) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{Mínimo, c.q.j.}$$

****

2º) Calcula las integrales $I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right) \cdot dx$ e $I_2 = \int x \cdot Lx \cdot dx$.

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right) \cdot dx = 4 \cdot \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} \cdot dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx =$$

$$= 4 \cdot \int x^{\frac{5}{2}} \cdot dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \int x^{-\frac{1}{4}} \cdot dx =$$

$$= \frac{8}{7} \cdot x^3\sqrt{x} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{8}{7} \cdot x^3\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{8}{7} \cdot x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right) \cdot dx = \frac{4}{21} \cdot \left(6x^2\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x^3}\right) + C.}$$

$$I_2 = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.$$

$$\underline{I_2 = \int x \cdot Lx \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.}$$

****

3º) $a)$ Despeja X en la ecuación $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden tres.

$b)$ Calcula X, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$c)$ Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}.

$a)$

$$A \cdot X - A = 2A^2;\ \ A \cdot X = 2A^2 + A = A \cdot (2A + I) \ \Rightarrow \ \underline{X = 2A + I}.$$

$b)$

$$X = 2A + I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{-1}.$$

Sabiendo que $|A^n| = |A|^n$:

$|A^{101}| = |A|^{101} = (-1)^{101} = \underline{-1}.$ $\qquad$ $|A^{1.000}| = |A|^{1.000} = (-1)^{1.000} = \underline{1}.$

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x + ay + 3z = 2, a\epsilon R$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$:

a) Halla ɑ para que π y r se corten perpendicularmente.

b) Halla ɑ para que π y r sean paralelos.

----

a)

Una recta y un plano se cortan perpendicularmente cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes (paralelos).

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, a, 3)$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 1)$ y : $\overrightarrow{n_2} = (2, -1, 0)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - k + 4k + i = i + 2j + 3k = (1, 2, 3).$$

Tiene que cumplirse que: $\frac{1}{1} = \frac{a}{2} = \frac{3}{3} \Rightarrow a = 2.$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ a = 2.}$$

b)

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1, a, 3) \cdot (1, 2, 3) = 0;\ 1 + 2a + 9 = 0;\ 2a + 10 = 0 \Rightarrow a = -5.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ para\ a = -5.}$$

****